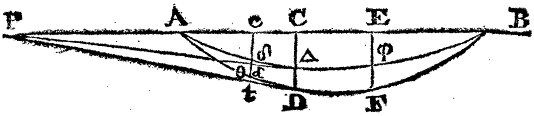
IV. *De motu Nervi tenſi. Per* Brook Taylor *Armig. Regal. Societat. Sodal.*

Lemma I.

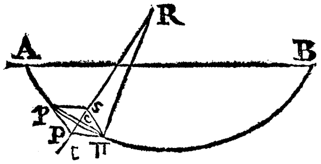


Sint ADFB, *&* AΔΦB *Curvæ duæ, quarum relatio inte ſe hæc eſt, ut, ductis ad libitum ordinatis* CΔD, EΦF, *ſit* CΔ : CD :: EΦ : EF. *Tum ordinatis in infinitum imminutis, adeo ut coincidant Curvæ cum axe* AB; *dico quod ſit ultima ratio curvaturæ in* Δ *ad curvaturam in* D, *ut* CΔ *ad* CD.

D*Emonſtr.* Duc ordinatam cδd ipſi CD proximam; & ad D & Δ duc tangentes Dt & Δθ, ordinatæ cd occurrentes in t & θ. Tum ob cδ : cd :: CΔ : CD (per Hypotheſin) tangentes productæ ſibi invicem & axi occurrent in eodem puncto P. Unde ob triangula ſimilia CDP & ctP, CΔP & cθP, erit cθ : ct :: CΔ : CD (:: cδ : cd, per Hyp) :: δθ (= cθ - cδ) ad dt (= ct - cd.) Atqui ſunt curvaturæ in Δ & D, ut anguli contactûs θΔδ & tDd; & ob δΔ & dD coincidentes cum cC, anguli iſti ſunt ut eorum ſubtenſæ δθ & dt, hoc eſt (per analogiam ſupra inventam) ut CΔ & CD. Quare, *&c.* Q. E. D.

Lemma

Lemma 2.

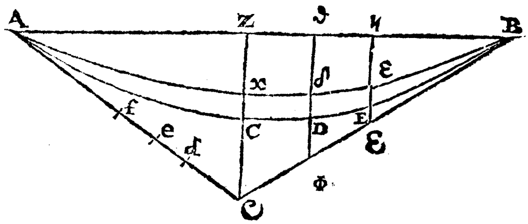


In aliquo articulo vibrationis suæ induat Nervus tensus, inter puncta A & B, formam curvæ cujusvis A p π B. Tum dico quod sit incrementum velocitatis puncti alicujus P, seu acceleratio oriunda a vi tensionis Nervi, ut curvatura Nervi in eodem puncto.

Demonstr. Finge Nervum constare ex particulis rigidis æqualibus infinite parvis p P & P π, *&c.* & ad punctum P erige perpendicularem P R = radio curvaturæ in P, cui occurrant tangentes p t & π t in t, iis parallelæ π s & p s in s, & chorda p π in c. Tum, per Principia Mechanicæ, vis absoluta, quâ urgentur particulæ ambæ p P & P π versûs R, erit ad vim tensionis fili, ut s t ad p t; & hujus vis dimidium, quo urgetur particula una p P, erit ad Nervi tensionem, ut c t ad t p, hoc est, (ob triangula similia c t p, t p R) ut t p vel P p ad R t vel P R. Quare, ob tensionis vim datam, erit vis acceleratrix absoluta ut $\frac{P\,p}{P\,R}$. Sed est acceleratio genita in ratione compositâ ex rationibus vis absolutæ directè & materiæ movendæ inversè; atq; est materia movenda ipsa particula P p. Quare est acceleratio ut $\frac{1}{P\,R}$, hoc est ut Curvatura in P. Est enim Curvatura reciprocè ut radius circuli osculatorii. Q. E. D.

Prob. 1.

Definire motum Nervi tenſi.



In hoc Problemate & ſequentibus pono Nervum moveri per ſpatium minimum ab axe motûs; ut incrementum tenſionis ex auctâ longitudine, item obliquitas radiorum curvaturæ poſſint tutò negligi.

Itaq; extendatur Nervus inter puncta A & B; & plectro deducatur punctum z ad diſtantiam C z ab axe A B. Tum amoto plectro, ob flexuram in puncto ſolo *C*, illud primum incipiet moveri (*per Lemma* 2.) At ſtatim inflexo Nervo in punctis proximis Φ & d, incipient hæc puncta etiam moveri; & deinde *E* & e, & ſic deinceps. Item ob magnam flexuram in *C*, illud punctum primò velociſſime movebitur; & exinde auctâ curvaturâ in punctis proximis *D*, *E*, *&c.* ea continuo velocius accelerabuntur; & eâdem operâ, imminutâ curvaturâ in C, id punctum viciſſim tardius accelerabitur. Et univerſaliter, punctis juſtò tardioribus magis & velocioribus minùs acceleratis, tandem fiet ut viribus inter ſe ritè temperatis, motus omnes conſpirent, punctis omnibus ad axem ſimul euntibus & ſimul redeuntibus, vicibus alternis ad infinitum.

Sed ut hoc fiat debet Nervus ſemper induere formam curvæ A C D E B, cujus curvatura in quovis puncto E eſt ut ejuſdem diſtantia ab axe E π; velocitatibus etiam punctorum C, D, E, *&c.* conſtitutis inter ſe in ratione diſtantiarum ab axe C z, D ϑ, E π, *&c.* Etenim in hoc caſu,

casu, spatia C x, D δ, E ε, *&c.* eodem tempore minimo percursa, erunt inter se ut velocitates, hoc est ut spatia percurrenda C z, D ϑ, *&c.* Unde erunt spatia residua x z, δ ϑ, ε η, *&c.* inter se in eâdem ratione. Item (*per Lemma* 2.) erunt accelerationes inter se in eâdem ratione. Quo pacto, semper servatâ ratione velocitatum inter se eâdem ac spatiorum percurrendorum, puncta omnia simul pervenient ad axem & simul redibunt: adeoq; rectè definitur curva A C D E B. Q. E. D.

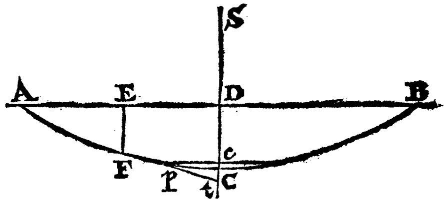
Præterea, comparatis inter se duabus curvis A C D E B, & A x δ ε B, *per Lemma* 1. erunt curvaturæ in D & δ, ut distantiæ ab axe D ϑ & δ ϑ: adeoq; *per Lemma* 2. acceleratio dati cujusvis puncti in Nervo erit ut ejusdem distantia ab axe. Unde (*per Phil. Nat. Princip. Math. Sect.* X. *Prop.* 51.) vibrationes omnes, tam maximæ quam minimæ, peragentur in eodem tempore periodico, & puncti cujusvis motus similis erit oscillationi corporis Funipenduli in Cycloide. Q. E. I.

Cor. Sunt Curvaturæ reciprocè ut radii circulorum osculantium. Sit ergo *a* linea data, atq; erit radius curvaturæ in $E = \frac{aa}{E\eta}$.

Prob. 2.

Datis longitudine & pondere Nervi, unà cum pondere tendente; invenire tempus unius vibrationis.

Extendatur nervus inter puncta A & B per vim ponderis P, & sit nervi ipsius pondus N, & longitudo L. Item constituatur nervus in positione A F p C B, & ad



punctum

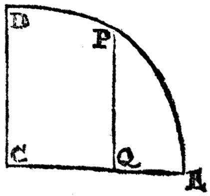
punctum medium C erige normalem C S = radio curvaturæ in C, & occurrentem axi A B in D; & ſumpto puncto p ipſi C proximo, duc normalem p c & tangentem p t.

Ergo, ut in Lemmate 2, conſtat vim abſolutam quâ acceleratur particula p C, eſſe ad vim ponderis P, ut c t ad p t, i. e. ut p C ad C S. Sed eſt pondus P ad pondus ipſius particulæ p C, in ratione compoſitâ ex rationibus P ad N, & N ad pondus particulæ p C, vel L ad p C; hoc eſt, ut $P \times L$ ad $N \times pC$. Quare compoſitis his rationibus, eſt vis acceleratrix ad vim gravitatis ut $P \times L$ ad $N \times CS$. Conſtituatur itaque pendulum longitudine C D: tum (*per Princip. Math. Sect. X. Prob.* 52.) erit tempus periodicum Nervi ad tempus periodicum iſtius penduli, ut $\sqrt{N \times CS}$ ad $\sqrt{P \times L}$: At (per eandem Propoſit.) datâ vi gravitatis longitudines pendulorum ſunt in duplicatâ ratione temporum periodicorum; unde erit $\frac{N \times CS \times CD}{P \times L}$, vel (pro C S ſcripto $\frac{aa}{CD}$, *per Cor. Prob.* 1.) $\frac{N \times aa}{P \times L}$ longitudo penduli cujus vibrationes ſunt iſochronæ vibrationibus Nervi.

Ad inveniendam lineam a, ſit Curvæ abſciſſa A E = z, & ordinata E F = x, & ipſa Curva A F = v, & C D = b. Tum (*per Cor. Prob.* 1.) erit radius curvaturæ in F = $\frac{aa}{x}$. At dato $\dot{v}$ eſt radius curvaturæ $\frac{\dot{v}\dot{x}}{\ddot{z}}$. Unde $\frac{aa}{x} = \frac{\dot{v}\dot{x}}{\ddot{z}}$; adeoq; $aa\ddot{z} = \dot{v}x\dot{x}$: & ſumptis fluentibus $aa\dot{z} = \frac{\dot{v}xx}{2} - \frac{\dot{v}bb}{2} + \dot{v}aa$ (ubi additur data quantitas $-\dot{v}bb$

$\frac{-\dot{v}\,b\,b}{2} + \dot{v}\,a\,a$, ut fiat $\dot{z} = \dot{v}$ in puncto medio C.) Et hinc peracto calculo erit $\dot{z} = \frac{a^2\dot{x} - \frac{1}{2}b^2\,\dot{x} + \frac{1}{2}x_2\,\dot{x}}{\sqrt{a^2b^2 - a^2x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{2}b^2x^2}}$

Evanescant jam b & x respectu a, ut coincidat curva cum axe, & fiet $\dot{z} = \frac{a\,\dot{x}}{\sqrt{bb - xx}}$. At centro C & radio C D = b descripto quadrante circulari D P E, & facto C Q = x, & erectâ normali Q P, atque arcu D P existente y, erit $\dot{y} = \sqrt{\frac{b\,\dot{x}}{bb - xx}} = \frac{b}{a}\,\dot{z}$.



Unde $y = \frac{b}{a}z$, & $z = \frac{a}{b}y$. Et facto x = b = C D, (quo casu etiam fit y = arcui quadrantali D P E, & $z = A\,D = \frac{1}{2}L$) erit $\frac{1}{2}L = a \times \frac{DE}{CD}$, atq; $a = L \times \frac{CD}{2DE}$. Sit ergo C D ad 2 D E (ut diameter circuli ad circumferentiam) ut d ad c; atq; erit $a\,a = L\,L \times \frac{dd}{cc}$. Substituto itaq; hoc valore pro a a, erit $\frac{N}{P} \times L \times \frac{dd}{cc}$ longitudo penduli isochroni ipsi Nervo. Sit ergo D longitudo cujus tempus periodicum est 1, atq; erit $\frac{d}{c}\sqrt{\frac{N}{P} \times \frac{L}{D}}$ tempus periodicum Nervi. Q. E. I. Sunt enim pendulorum tempora periodica in dimidiatâ ratione longitudinum.

Cor. 1. Numerus vibrationum Nervi in tempore unius vibrationis penduli D est $\frac{c}{d} \times \sqrt{\frac{P}{N} \times \frac{D}{L}}$.

Cor. 2. Ob datum $\frac{d}{c} \times \sqrt{\frac{1}{D}}$, tempus periodicum Nervi est ut $\sqrt{\frac{N}{P} \times L}$. Et dato pondere P est tempus ut $\sqrt{N \times L}$. Item constitutis Nervis ex eodem filo, quo casu fit N ut L, est tempus ut L.
